

UOT 517.97

NAZİK LÖVHƏNİN RƏQSLƏRİNİN ZƏİF QEYRİ-XƏTTİ TƏNLIYI
ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ

X.İ.SEYFULLAYEVA

Sumqayıt Dövlət Universiteti
seyfullayeva.xeyale@yandex.ru

Təqdim olunan işdə nazik lövhənin rəqslərinin zəif qeyri-xətti tənliyi üçün optimal idarəetmə məsələsinə baxılmışdır. Əvvəlcə hər bir qeyd olunmuş idarəedicisi üçün baxılan sərhəd məsələsinin ümumiləşmiş həllinin varlığı və yeganəliyi isbat edilmiş, sonra optimal idarəetmə məsələsində optimal idarəedicinin varlığı teoremi isbat edilmiş, sonda optimallığın Pontryaginın maksimum prinsipi tipli zəruri şərti çıxarılmışdır.

Açar sözlər: nazik lövhə, optimal idarəetmə, varlıq teoremi, zəruri şərt.

Dördtərtibli xüsusi törəmli diferensial tənliklər xüsusi törəmli diferensial tənliklərin mühüm bir hissəsini təşkil edir. Məlumdur ki, bir sıra proseslər dördtərtibli xüsusi törəmli diferensial tənliklərlə təsvir olunur. Bunlardan çubuğun, kamertonun, üçlaylı lövhələrin, elastiki lövhələrin, nazik lövhələrin və s. rəqsləri tənliklərini misal göstərmək olar [1], [2], [3]. Ona görə də belə tənliklərlə təsvir olunan proseslərdə optimal idarəetmə məsələlərinin öyrənilməsi mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Qeyd edək ki, son dövrlərdə belə proseslər üçün optimal idarəetmə məsələlərinin intensiv tədqiqinə başlanılıb [4], [5], [6].

Məsələnin qoyuluşu. Fərz edək ki, idarə olunan proses

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \nabla^2 (D \nabla^2 u) + (1-\nu) \left(2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = f \left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \nu \right) \quad (1)$$

tənliyi,

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = u_1(x, y) \quad (2)$$

başlanğıc şərtləri və

$$\begin{aligned}
u(0, y, t) = 0, \frac{\partial u(0, y, t)}{\partial x} = 0, u(x, 0, t) = 0, \frac{\partial u(x, 0, t)}{\partial y} = 0, \\
u(a, y, t) = 0, \frac{\partial u(a, y, t)}{\partial x} = 0, u(x, b, t) = 0, \frac{\partial u(x, b, t)}{\partial y} = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

sərhəd şərtləri ilə təsvir olunur. Qeyd edək ki, (1) tənliyi nazik lövhənin rəqsləri tənliyinin ümumiləşməsidir.

Burada $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega = (0, a) \times (0, b)$, $a, b, T > 0$ müsbət ədədlər, $u_0(x, y)$, $u_1(x, y)$ -verilmiş funksiyalardır, $u(x, y, t)$ -lövhənin yerdəyişməsi,

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ -lövhənin əyilmə möhkəmliyi, $h(x, y)$ -lövhənin qalınlığıdır,

$0 < \mu_1 \leq h(x, y) \leq \mu_2$, μ_1, μ_2 -verilmiş ədədlərdir və $h(x, y)$ -in $\bar{\Omega}$ -da iki tərtibə qədər kəsilməz törəmələri var, E ($E > 0$)-Yunq modulu, ν

$\left(0 < \nu < \frac{1}{2}\right)$ -Puasson əmsalıdır, ∇^2 -Laplas operatorudur, yəni

$\nabla^2 u \equiv \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\rho(x, y)$ -lövhənin kütlə sıxlığıdır, $f(x, y, t, u, p, q, \nu)$ -

verilmiş funksiyadır.

Mümkün idarəedicilər sinfi U_{ad} olaraq $L_2(Q_T)$ -də kompakt və qiymətləri $[\nu, \mu]$ parçasına daxil olan $\nu(x, y, t)$ funksiyalar çoxluğu götürülür, burada ν, μ -verilmiş ədədlərdir.

Hər bir $\nu(x, y, t)$ mümkün idarəedicisinə uyğun (1)-(3) məsələsinin həlli dedikdə elə $u(x, y, t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$ funksiyası başa düşülür ki, o ixtiyari $\eta(x, y, t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$, $\eta(x, y, T) = 0$,

$$\begin{aligned}
\eta(0, y, t) = 0, \frac{\partial \eta(0, y, t)}{\partial x} = 0, \eta(x, 0, t) = 0, \frac{\partial \eta(x, 0, t)}{\partial y} = 0, \\
\eta(a, y, t) = 0, \frac{\partial \eta(a, y, t)}{\partial x} = 0, \eta(x, b, t) = 0, \frac{\partial \eta(x, b, t)}{\partial y} = 0
\end{aligned}$$

funksiyası üçün

$$\begin{aligned}
\int_{Q_T} \left[-\rho \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} + D \nabla^2 u \nabla^2 \eta + (1-\nu) \left(2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \eta \right] dx dy dt - \\
- \int_{\Omega} \rho u_1(x, y) \eta(x, y, 0) dx dy = \int_{Q_T} f(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \nu) \eta(x, y, t) dx dy dt
\end{aligned}$$

inteqral eyniliyini və $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$ şərtini ödəsin. Belə həllə (1)-(3) məsələsinin ümumiləşmiş həlli deyilir.

Aşağıdakı kimi optimal idarəetmə məsələsi qoyulur: U_{ad} mümkün idarəedicilər sinfindən elə idarəedici tapmalı ki, o, (1)-(3) sərhəd məsələsinin həlli ilə birlikdə

$$J(v) = \int_{Q_T} f_0(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, v) dx dy dt \quad (4)$$

funksionalına minimum qiymət versin, burada $f_0(x, y, t, u, p, q, v)$ -verilmiş funksiyadır.

(1)-(3) sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi

Tutaq ki, qoyulan məsələnin verilənləri aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1. $u_0 \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$, $u_1 \in L_2(\Omega)$, $\rho(x, y) \in \overline{\Omega}$ -də kəsilməz funksiyadır və $\rho(x, y) \geq \gamma > 0$, γ -verilmiş ədəddir.

2. $f(x, y, t, u, p, q, v)$ və $f_0(x, y, t, u, p, q, v)$ funksiyaları $\overline{Q_T} \times R \times [\nu, \mu]$ -də kəsilməz funksiyalardır, $f(x, y, t, u, p, q, v)$ funksiyası (x, y, t) -yə görə müntəzəm olaraq u , p , q , v -yə görə Lipşis şərtini ödəyir, $f_0(x, y, t, u, p, q, v)$ funksiyası u , p , q , v -yə görə kvadratik artım şərtini ödəyir, yəni

$$|f_0(x, y, t, u, p, q, v)| \leq a_0 + b_0(|u|^2 + |p|^2 + |q|^2 + |v|^2),$$

burada $a_0 > 0$, $b_0 > 0$ -sabit ədədlərdir.

Göstərək ki, hər bir qeyd olunmuş $v(x, y, t)$ idarəedicisi üçün (1)-(3) məsələsinin yeganə ümumiləşmiş həlli var. Faedo-Qalyorkin üsulunu tətbiq edək.

Fərz edək ki, $\{\omega_i(x, y)\}_{i=1}^{\infty}$ funksiyaları $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$ -da bazis əmələ gətirir və

$$\int_{\Omega} \omega_k(x, y) \omega_i(x, y) dx dy = \delta_k^n = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

(1)-(3) məsələsinin təqribi həllini

$$u^N(x, y, t) = \sum_{i=1}^N c_i^N(t) \omega_i(x, y)$$

şəklində aşağıdakı bərabərliklərdən axtaraq:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2} \omega_j(x, y) dx dy + \int_{\Omega} D \nabla^2 u^N \nabla^2 \omega_j(x, y) dx dy + \\ & + (1 - \nu) \int_{\Omega} \left(2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u^N}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} \right) \omega_j(x, y) dx dy = \\ & = \int_{\Omega} f \left(x, y, t, u^N, \frac{\partial u^N}{\partial x}, \frac{\partial u^N}{\partial y}, v \right) \omega_j(x, y) dx dy, \quad 1 \leq j \leq N, \end{aligned} \quad (5)$$

$$c_i^N(0) = \alpha_i^N, \quad \left. \frac{d}{dt} c_i^N(t) \right|_{t=0} = \beta_i^N,$$

burada α_i^N və β_i^N , $u_0(x, y)$ və $u_1(x, y)$ funksiyalarını $N \rightarrow \infty$ olduqda uyğun olaraq $W_2^2(\Omega)$ və $L_2(\Omega)$ -də aproksimasiya edən

$$u_0^N(x, y) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^N \omega_i(x, y), \quad u_1^N(x, y) = \sum_{i=1}^N \beta_i^N \omega_i(x, y)$$

cəmlərinin əmsallarıdır.

(5) bərabərliyinin hər iki tərəfini $\frac{d}{dt} c_j^N(t)$ -yə vurub, j görə 1-dən N -ə qədər cəmləsək, alarıq:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2} \frac{\partial u^N}{\partial t} dx dy + \int_{\Omega} D \nabla^2 u^N \nabla^2 \frac{\partial u^N}{\partial t} dx dy + \\ & + (1-\nu) \int_{\Omega} \left(2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u^N}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} \right) \frac{\partial u^N}{\partial t} dx dy = \\ & = \int_{\Omega} f \left(x, y, t, u^N, \frac{\partial u^N}{\partial x}, \frac{\partial u^N}{\partial y}, \nu \right) \frac{\partial u^N}{\partial t} dx dy. \end{aligned}$$

Buradan alınır ki,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left[\rho \left(\frac{\partial u^N}{\partial t} \right)^2 + D (\nabla^2 u^N)^2 \right] dx dy = \\ & = -(1-\nu) \int_{\Omega} \left(2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u^N}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} \right) \frac{\partial u^N}{\partial t} dx dy + \\ & + \int_{\Omega} f \left(x, y, t, u^N, \frac{\partial u^N}{\partial x}, \frac{\partial u^N}{\partial y}, \nu \right) \frac{\partial u^N}{\partial t} dx dy. \end{aligned}$$

Bu bərabərliyi t -yə görə 0-dan t -yə qədər inteqrallasaq verilənlər üzərinə qoyulmuş şərtlər daxilində aşağıdakı münasibəti alarıq:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u^N(x, y, t)}{\partial t} \right)^2 + (\nabla^2 u^N(x, y, t))^2 \right] dx dy \leq C + \\ & + C \int_0^t \int_{\Omega} \left[(u^N(x, y, s))^2 + \left(\frac{\partial u^N(x, y, s)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^N(x, y, s)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^N(x, y, s)}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 u^N(x, y, s)}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N(x, y, s)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N(x, y, s)}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy ds, \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

burada və bundan sonra C ilə qiymətləndirilən kəmiyyətlərdən asılı olmayan müxtəlif müsbət sabitləri işarə edəcəyik.

$W_2^2(\Omega)$ fəzasındakı normaların ekvivalentliyinə görə

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\left(u^N(x, y, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial u^N(x, y, t)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^N(x, y, t)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^N(x, y, t)}{\partial t} \right)^2 + \left(\nabla^2 u^N(x, y, t) \right)^2 \right] dx dy \leq \\ & \leq C + C \int_0^t \int_{\Omega} \left[\left(u^N(x, y, s) \right)^2 + \left(\frac{\partial u^N(x, y, s)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^N(x, y, s)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^N(x, y, s)}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial^2 u^N(x, y, s)}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N(x, y, s)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N(x, y, s)}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy ds \end{aligned}$$

olar.

[7]-dəki məlum

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \leq \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2} \right]^2 dx dy$$

bərabərsizliyinə görə alarıq:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\left(u^N(x, y, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial u^N(x, y, t)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^N(x, y, t)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^N(x, y, t)}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial^2 u^N(x, y, t)}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N(x, y, t)}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \leq \\ & \leq C + C \int_0^t \int_{\Omega} \left[\left(u^N(x, y, s) \right)^2 + \left(\frac{\partial u^N(x, y, s)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^N(x, y, s)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^N(x, y, s)}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial^2 u^N(x, y, s)}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N(x, y, s)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N(x, y, s)}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy ds . \end{aligned}$$

Bu bərabərsizliyə Qronuoll lemmasını [7] tətbiq etsək,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\left(u^N(x, y, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial u^N(x, y, t)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^N(x, y, t)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^N(x, y, t)}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial^2 u^N(x, y, t)}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u^N(x, y, t)}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \leq const, \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (6)$$

olar.

Buradan alınır ki, $\{u^N\}$ ardıcılığı $W_2^{2,1}(Q_T)$ -də məhduddur. Ona görə də $\{u^N\}$ -dən elə alt ardıcılıq ayırmaq olar ki, (həmin ardıcılığı da $\{u^N\}$ kimi işarə edəcəyik), $N \rightarrow \infty$ olduqda

$$u^N \rightarrow u, \frac{\partial u^N}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u^N}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u^N}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u^N}{\partial x \partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad L_2(Q_T) \text{-də zəif.} \quad (7)$$

Onda kompaktlıq teoreminə görə [7], $N \rightarrow \infty$ olduqda

$$u^N \rightarrow u, \frac{\partial u^N}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u^N}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} \quad L_2(Q_T) \text{-də güclü.} \quad (8)$$

(1)-(3) məsələsinin ümumiləşmiş həllinin tərifində $u = u^N$ götürək:

$$\int_{Q_T} \left[-\rho \frac{\partial u^N}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + D \nabla^2 u^N \nabla^2 \eta + (1-\nu) \left(2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u^N}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} \right) \eta \right] dx dy dt -$$

$$- \int_{\Omega} \rho u_1^N(x, y) \eta(x, y, 0) dx dy = \int_{Q_T} f \left(x, y, t, u^N, \frac{\partial u^N}{\partial x}, \frac{\partial u^N}{\partial y}, \nu \right) \eta(x, y, t) dx dy dt.$$

$f(x, y, t, u, p, q, \nu)$ funksiyası u, p, q arqumentlərinə görə Lipşis şərtini ödədiyindən həmin arqumentlərə görə xətti artım şərtini ödəyir, yəni

$$|f(x, y, t, u, p, q, \nu) \leq a + b[|u| + |p| + |q|],$$

burada $a, b > 0$ sabit ədədlərdir.

Onda $f(x, y, t, u, p, q, \nu)$ funksiyası ilə əmələ gələn $F(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$ Nemitski operatoru hər bir qeyd olunmuş $\nu(x, y, t)$ mümkün idarəedicisi üçün $(L_2(Q_T))^3$ -dən $L_2(Q_T)$ -yə kəsilməz təsir edir [8].

Onda $N \rightarrow \infty$ şərtində limitə keçsək və (7), (8) münasibətlərini nəzərə alsaq,

$$\int_{Q_T} \left[-\rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + D \nabla^2 u \nabla^2 \eta + (1-\nu) \left(2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \eta \right] dx dy dt -$$

$$- \int_{\Omega} \rho u_1(x, y) \eta(x, y, 0) dx dy = \int_{Q_T} f \left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \nu \right) \eta(x, y, t) dx dy dt$$

olar. Beləliklə, alırıq ki, $u(x, y, t)$ funksiyası (1)-(3) məsələsinin ümumiləşmiş həllidir.

Həllin yeganəliyini standart üsulla göstərmək olar, yəni hər bir mümkün idarəediciyə uyğun (1)-(3) məsələsinin iki u_1, u_2 həllinin olduğunu fərz etsəydik, onların fərqi olan $u = u_1 - u_2$ funksiyası üçün (6)-ya analogi olaraq

$$\int_{\Omega} \left[(u)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \leq const$$

$$, \forall t \in [0, T]$$

qiymətləndirməsini alardıq. Buradan isə $u = u_1 - u_2 \equiv 0$ olduğu alınır, yəni

$$u_1 = u_2.$$

Optimal idarəedicinin varlığı

Teorem 1. (1)-(4) məsələsinin verilənləri üzərinə yuxarıda qoyulan şərtlər daxilində həmin məsələdə optimal idarəedici var.

İsbatı. Tutaq ki, $\{v_n\} \in U_{ad}$ minimallaşdırıcı ardıcılıqdır, yəni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v). \quad (9)$$

Mümkün idarəedicilər sinfinin tərifindən alınır ki, $\{v_n\}$ ardıcılığı $L_2(Q_T)$ -də kompakt çoxluğa daxildir və

$$\|v_n\|_{L_2(Q_T)} \leq const.$$

(1)-(3) məsələsinin v_n idarəediciyinə uyğun həllini $u_n(x, y, t)$ ilə işarə edək.

$\{u_n\}$ ardıcılığı üçün II hissədəki qayda ilə

$$\|u_n\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \leq const \quad (10)$$

qiymətləndirməsini alarıq.

(10) münasibətindən Hilbert fəzasındaki zəif kompaktlıq xassəsinə əsasən $n \rightarrow \infty$ olduqda alarıq:

$$u_n \rightarrow u_0, \frac{\partial u_n}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_n}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial u_n}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial t}, \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \quad L_2(Q_T) \text{-də zəif.} \quad (11)$$

$\{v_n\}$ ardıcılığı $L_2(Q_T)$ -də kompakt çoxluğa daxil olduğundan və (11)-i nəzərə almaqla kompaktlıq teoremindən [7] alınır ki,

$$v_n \rightarrow v_0, u_n \rightarrow u_0, \frac{\partial u_n}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_n}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial y}, \quad L_2(Q_T) \text{-də güclü.} \quad (12)$$

Ümumiləşmiş həllin tərifində $v = v_n, u = u_n$ yazaq:

$$\int_{Q_T} \left[-\rho \frac{\partial u_n}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + D \nabla^2 u_n \nabla^2 \eta + (1-\nu) \left(2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right) \eta \right] dx dy dt - \int_{\Omega} \rho u_1(x, y) \eta(x, y, 0) dx dy = \int_{Q_T} f \left(x, y, t, u_n, \frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial u_n}{\partial y}, \nu_n \right) \eta(x, y, t) dx dy dt. \quad (13)$$

$f(x, y, t, u, p, q, \nu)$ funksiyası u, p, q, ν arqumentlərinə görə Lipşis şərtini ödədiyindən, həmin arqumentlərə görə xətti artım şərtini ödəyir, yəni

$$|f(x, y, t, u, p, q, \nu)| \leq a_1 + b_1 [|u| + |p| + |q| + |\nu|],$$

burada $a_1, b_1 > 0$ sabit ədədlərdir.

Onda $f(x, y, t, u, p, q, \nu)$ funksiyası ilə əmələ gələn

$$F_1(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \nu) \equiv f \left(x, y, t, u(x, y, t), \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}, \nu(x, y, t) \right)$$

Nemitski operatoru $(L_2(Q_T))^4$ -dən $L_2(Q_T)$ -yə kəsilməz təsir edir [8].

Onda (11)-i və (12)-ni nəzərə almaqla (13) bərabərliyində limitə keçək:

$$\int_{Q_T} \left[-\rho \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + D \nabla^2 u_0 \nabla^2 \eta + (1-\nu) \left(2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) \eta \right] dx dy dt - \int_{\Omega} \rho u_1(x, y) \eta(x, y, 0) dx dy = \int_{Q_T} f \left(x, y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \nu_0 \right) \eta(x, y, t) dx dy dt.$$

Bu münasibət göstərir ki, $u_0(x, y, t)$ funksiyası (1)-(3) məsələsinin $\nu_0(x, y, t)$ idarəedicisinə uyğun ümumiləşmiş həllidir.

$f_0(x, y, t, u, p, q, \nu)$ funksiyası u, p, q, ν -yə görə kvadratik artıma malikdir. Onda $f_0(x, y, t, u, p, q, \nu)$ funksiyası ilə əmələ gələn $F_0(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \nu)$

Nemitski operatoru $(L_2(Q_T))^4$ -dən $L_1(Q_T)$ -yə kəsilməz təsir edir [8]. Ona görə də (9)-u nəzərə almaqla yazı bilərik:

$$\begin{aligned} \inf_{\nu \in U_{ad}} J(\nu) &= \lim_{n \rightarrow \infty} J(\nu_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_T} f_0 \left(x, y, t, u_n, \frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial u_n}{\partial y}, \nu_n \right) dx dy dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_T} f_0 \left(x, y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \nu_0 \right) dx dy dt = J(\nu_0). \end{aligned}$$

Bu isə göstərir ki, $\nu_0(x, y)$ idarəedicisi (4) funksionalına minimum qiymət verir, yəni optimal idarəedicidir.

Teorem isbat olundu.

Optimallığın zəruri şərti

Optimallığın zəruri şərtini çıxarmaq üçün fərz edək ki, (1) tənliyinin sağ tərəfi olan $f(x, y, t, u, p, q, \nu)$ funksiyası və (4) funksionalında inteqralları

$f_0(x, y, t, u, p, q, v)$ funksiyası p, q -dən asılı deyillər və bu halda mümkün idarəedicilər sinfi olaraq Q_T -də ölçülən, qiymətləri sanki bütün $(x, y, t) \in Q_T$ üçün $[v, \mu]$ -yə daxil olan funksiyalar sinfi götürülür.

Fərz edək ki, (1)-(4) məsələsinin verilənləri aşağıdakı şərtləri ödəyir.

1. $u_0 \in W_2^2(\Omega), u_1 \in L_2(\Omega)$.

2. $f(x, y, t, u, v)$ и $f_0(x, y, t, u, v)$ funksiyaları $\bar{Q}_T \times R \times [v, \mu]$ -də kəsilməzdirlər,

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f_0}{\partial u} \text{ kəsilməz törəmələrinə malikdirlər, belə ki, } \frac{\partial f}{\partial u} \text{ məhduddur,}$$

$\frac{\partial f_0}{\partial u}$ u -ya görə Lipsiz şərtini ödəyir.

Verilmiş $v^0(x, y, t)$ mümkün idarəedicisi üçün aşağıdakı qoşma məsələni daxil edək:

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \nabla^2(D \nabla^2 \psi) + (1-\nu) \left[2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\psi \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\psi \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\psi \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right) \right] = \frac{\partial H(x, y, t, u^0, v^0, \psi)}{\partial u}, \quad (14)$$

$$\psi(0, y, t) = \psi(a, y, t) = 0, \quad \frac{\partial \psi(0, y, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(a, y, t)}{\partial x} = 0, \quad (15)$$

$$\psi(x, 0, t) = \psi(x, b, t) = 0, \quad \frac{\partial \psi(x, 0, t)}{\partial y} = \frac{\partial \psi(x, b, t)}{\partial y} = 0,$$

$$\psi(x, y, T) = 0, \quad \frac{\partial \psi(x, y, T)}{\partial t} = 0, \quad (16)$$

burada $H(x, y, t, u, v, \psi) = \psi f(x, y, t, u, v) - f_0(x, y, t, u, v)$ baxılan məsələ üçün Hamilton funksiyasıdır.

Göstərmək olar ki, verilmiş şərtlər daxilində (14)-(16) xətti məsələsinin $W_2^{2,1}(Q_T)$ fəzasında yeganə ümumiləşmiş həlli var və əlavə olaraq belə həll $\psi \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega)), \frac{\partial \psi}{\partial t} \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$ xassələrinə malikdir.

Burada $u^0(x, y, t)$ funksiyası $v^0(x, y, t)$ idarəedicisinə uyğun (1)-(3) məsələsinin ümumiləşmiş həllidir.

$v^0(x, y, t)$ mümkün idarəedicisinin aşağıdakı kimi impuls variasiyasına baxaq:

$$v_\varepsilon(x, y, t) = \begin{cases} v(x, y, t) \in \Pi_\varepsilon, \\ v^0(x, y, t), (x, y, t) \in Q_T \setminus \Pi_\varepsilon, \end{cases} \quad (17)$$

burada $\Pi_\varepsilon = \{(x, y, t) \in Q_T \mid \sigma < x < \sigma + \varepsilon, \eta < y < \eta + \varepsilon, \tau < t < \tau + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ elə kafi qədər kiçik ədəddir ki, $\Pi_\varepsilon \subset Q_T$, $(\sigma, \eta, \tau) \in Q_T$ məsələdə iştirak edən bütün funksiayaların Lebeq nöqtəsidir, $\nu \in [\nu, \mu]$ sabit ədəddir.

$$\delta\nu_\varepsilon(x, y, t) = \begin{cases} \nu - \nu^0(x, y, t), & (x, y, t) \in \Pi_\varepsilon, \\ 0, & (x, y, t) \in Q_T \setminus \Pi_\varepsilon \end{cases}$$

işarə edək.

(1)-(3) məsələsinin $\nu_\varepsilon(x, y, t)$ idarəedicisinə uyğun həllini $u_\varepsilon(x, y, t)$ ilə işarə edək. Onda aydındır ki, $\delta u_\varepsilon(x, y, t) = u_\varepsilon(x, y, t) - u^0(x, y, t)$ funksiyası aşağıdakı məsələnin həllidir.

$$\rho \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon}{\partial t^2} + \nabla^2 (D \nabla^2 \delta u_\varepsilon) + (1 - \nu) \left\{ 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon}{\partial x^2} \right\} = \quad (18)$$

$$= f(x, y, t, u^0 + \delta u_\varepsilon, \nu^0 + \delta \nu_\varepsilon) - f(x, y, t, u^0, \nu^0),$$

$$\delta u_\varepsilon(0, y, t) = \delta u_\varepsilon(a, y, t) = 0, \frac{\partial \delta u_\varepsilon(0, y, t)}{\partial x} = \frac{\partial \delta u_\varepsilon(a, y, t)}{\partial x} = 0, \quad (19)$$

$$\delta u_\varepsilon(x, 0, t) = \delta u_\varepsilon(x, b, t) = 0, \frac{\partial \delta u_\varepsilon(x, 0, t)}{\partial y} = \frac{\partial \delta u_\varepsilon(x, b, t)}{\partial y} = 0,$$

$$\delta u_\varepsilon(x, y, 0) = 0, \frac{\partial \delta u_\varepsilon(x, y, 0)}{\partial t} = 0. \quad (20)$$

Lemma. Yuxarıdakı şərtlər daxilində (18)-(20) məsələsinin həlli üçün

$$\begin{aligned} & \|\delta u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \delta u_\varepsilon}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \delta u_\varepsilon}{\partial y} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \delta u_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ & + \left\| \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon}{\partial x^2} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon}{\partial x \partial y} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon}{\partial y^2} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \cdot \varepsilon^4, t \in [0, T] \end{aligned} \quad (21)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

İsbatı. Aydındır ki, (18)-(20) sərhəd məsələsinin həlli üçün varlıq və yeganəlik teoremlərinin şərtləri ödəndiyindən

$$\delta u_\varepsilon(x, y, t) = 0, (x, y, t) \in \Omega \times [0, \tau]. \quad (22)$$

İndi fərz edək ki, $(x, y, t) \in \Omega \times [\tau, \tau + \varepsilon]$.

Fərz edək ki, $\{\omega_i(x, y)\}_{i=1}^\infty$ funksiyaları $W_2^2(\Omega)$ -da bazis əmələ gətirir və

$$\int_{\Omega} \omega_k(x, y) \omega_i(x, y) dx dy = \delta_k^n = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

(18)-(20) məsələsinin $\delta u_\varepsilon^N(x, y, t)$ təqribi həllini

$$\delta u_\varepsilon^N(x, y, t) = \sum_{i=1}^N c_i^N(t) \omega_i(x, y)$$

şəklində aşağıdakı bərabərliklərdən axtaraq:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N}{\partial t^2} \omega_j(x, y) dx dy + \int_{\Omega} D \nabla^2 \delta u_\varepsilon^N \nabla^2 \omega_j(x, y) dx dy + \\ & + (1-\nu) \int_{\Omega} \left(2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N}{\partial x^2} \right) \omega_j(x, y) dx dy = \end{aligned} \quad (23)$$

$$= \int_{\Omega} [f(x, y, t, u^0 + \delta u_\varepsilon^N, v^0 + \delta v_\varepsilon) - f(x, y, t, u^0, v^0)] \omega_j(x, y) dx dy, \quad 1 \leq j \leq N,$$

$$c_i^N(0) = 0, \quad \left. \frac{d}{dt} c_i^N(t) \right|_{t=0} = 0. \quad (24)$$

(23) bərabərlikləri $c_i^N(t)$, $i = 1, \dots, N$ məchulları üçün $\frac{d^2 c_i^N(t)}{dt^2}$ -yə nəzərən həll olunmuş ikitərtibli adi törəməli diferensial tənliklər sistemidir.

$f(x, y, t, u, v)$ funksiyası u -ya nəzərən Lipşis şərtini ödədiyindən, bu sistem (24) şərtləri daxilində birqiymətli həll olunandır və $\frac{d^2 c_i^N(t)}{dt^2} \in L_2(0, T)$.

(23) bərabərliyinin hər bir tərəfini $\frac{d}{dt} c_j^N(t)$ -yə vurub, j görə 1-dən N -ə qədər cəmləsək, alarıq:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N}{\partial t^2} \frac{\partial \delta u_\varepsilon^N}{\partial t} dx dy + \int_{\Omega} D \nabla^2 \delta u_\varepsilon^N \nabla^2 \frac{\partial \delta u_\varepsilon^N}{\partial t} dx dy + \\ & + (1-\nu) \int_{\Omega} \left(2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \delta u_\varepsilon^N}{\partial t} dx dy = \end{aligned} \quad (25)$$

$$= \int_{\Omega} [f(x, y, t, u^0 + \delta u_\varepsilon^N, v^0 + \delta v_\varepsilon) - f(x, y, t, u^0, v^0)] \frac{\partial \delta u_\varepsilon^N}{\partial t} dx dy.$$

Buradan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left[\rho \left(\frac{\partial \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial t} \right)^2 + D (\nabla^2 \delta u_\varepsilon^N(x, y, t))^2 \right] dx dy dt = \\ & = -(1-\nu) \int_{\Omega} \left\{ 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N}{\partial x^2} \right\} \frac{\partial \delta u_\varepsilon^N}{\partial t} dx dy + \end{aligned} \quad (26)$$

$$+ \int_{\Omega} [f(x, y, t, u^0(x, y, t) + \delta u_\varepsilon^N(x, y, t), v^0(x, y, t) + \delta v_\varepsilon(x, y, t)) - f(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t))] \times$$

$$\times \frac{\partial \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial t} dx dy.$$

$$\delta u_\varepsilon^N(x, y, \tau) = 0, \quad \frac{\partial(\delta u_\varepsilon^N(x, y, \tau))}{\partial t} = 0 \text{ şərtlərini nəzərə alsaq və sonuncu}$$

münasibəti t -yə nəzərən τ -dan t -yə qədər inteqrallasaq yaza bilərik:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left[\rho \left(\frac{\partial \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial t} \right)^2 + D(\nabla^2 \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)) \right] dx = \\ & = -(1-\nu) \int_{\tau}^t \int_{\Omega} \left\{ 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N}{\partial x^2} \right\} \frac{\partial \delta u_\varepsilon^N}{\partial t} dx dy ds + \\ & + 2 \int_{\tau}^t \int_{\Omega} \left[f(x, y, s, u^0(x, y, s) + \delta u_\varepsilon^N(x, y, s), v^0(x, y, s) + \delta v_\varepsilon(x, y, s)) - f(x, y, s, u^0(x, y, s), v^0(x, y, s)) \right] \times \\ & \quad \times \frac{\partial \delta u_\varepsilon^N(x, y, s)}{\partial t} dx dy ds. \end{aligned} \quad (27)$$

Aydınır ki,

$$\int_{\Omega} (\delta u_\varepsilon^N)^2 dx dy \leq C \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \delta u_\varepsilon^N}{\partial t} \right)^2 dx dy ds. \quad (28)$$

Bu bərabərsizliyi, $W_2^2(\Omega)$ -dakı normaların ekvivalentliyini və $f(x, y, t, u, v)$ funksiyası üzərinə qoyulan şərtləri nəzərə alsaq, (27) münasibətindən müəyyən çevirmələrlə yaza bilərik.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[(\delta u_\varepsilon^N(x, y, t))^2 + \left(\frac{\partial \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \leq \\ & \leq C \int_{\tau}^t \int_{\Omega} \left[(\delta u_\varepsilon^N(x, y, s))^2 + \left(\frac{\partial \delta u_\varepsilon^N(x, y, s)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta u_\varepsilon^N(x, y, s)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta u_\varepsilon^N(x, y, s)}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N(x, y, s)}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N(x, y, s)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N(x, y, s)}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy ds + \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
& + C \int_{\tau}^t \left\{ \int_{\Omega} \left[\left(\delta u_{\varepsilon}^N(x, y, s) \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta u_{\varepsilon}^N(x, y, s)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta u_{\varepsilon}^N(x, y, s)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta u_{\varepsilon}^N(x, y, s)}{\partial t} \right)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{\partial^2 \delta u_{\varepsilon}^N(x, y, s)}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u_{\varepsilon}^N(x, y, s)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u_{\varepsilon}^N(x, y, s)}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy ds \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\
& \quad \times \left(\int_{\Omega} \left[f(x, y, s, u^0(x, y, s) + \delta u_{\varepsilon}^N(x, y, s), v^0(x, y, s) + \delta v_{\varepsilon}(x, y, s)) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - f(x, y, s, u^0(x, y, s), v^0(x, y, s)) \right]^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} ds.
\end{aligned}$$

Aşağıdakı işarələmələri qəbul edək:

$$\begin{aligned}
A^N(t) \equiv \int_{\Omega} \left[\left(\delta u_{\varepsilon}^N(x, y, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta u_{\varepsilon}^N(x, y, t)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta u_{\varepsilon}^N(x, y, t)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta u_{\varepsilon}^N(x, y, t)}{\partial t} \right)^2 + \right. \\
\left. + \left(\frac{\partial^2 \delta u_{\varepsilon}^N(x, y, t)}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u_{\varepsilon}^N(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u_{\varepsilon}^N(x, y, t)}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy, \quad (30)
\end{aligned}$$

$$g(t) \equiv C \left(\int_{\Omega} \left[f(x, y, t, u^0(x, y, t) + \delta u_{\varepsilon}^N(x, y, t), v^0(x, y, t) + \delta v_{\varepsilon}(x, y, t)) - f(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t)) \right] dx dy \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (31)$$

Onda (29) bərabərliyini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$A^N(t) \leq C \int_{\tau}^t A^N(s) ds + \int_{\tau}^t g(s) \sqrt{A^N(s)} ds. \quad (32)$$

Tutaq ki,

$$\alpha(t) \equiv C \int_{\tau}^t A^N(s) ds + \int_{\tau}^t g(s) \sqrt{A^N(s)} ds.$$

Onda

$$\alpha(\tau) = 0.$$

Buradan

$$\dot{\alpha}(t) = CA^N(t) + g(t) \sqrt{A^N(t)} \leq C\alpha(t) + g(t) \sqrt{\alpha(t)}. \quad (33)$$

(33) bərabərsizliyinin hər tərəfini $\alpha^{-\frac{1}{2}}(t) \exp\left(-\frac{C(t-\tau)}{2}\right)$ -yə vurub τ -

dan t -yə qədər inteqrallasaq və nəticəni çevirsək alarıq:

$$\alpha(t) \leq C \left(\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} g(s) ds \right)^2 = \quad (34)$$

$$= C \left[\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} \left(\int_{\Omega} \left[f(x, y, s, u^0(x, y, s) + \delta u_{\varepsilon}^N(x, y, s), v^0(x, y, s) + \delta v_{\varepsilon}(x, y, s)) - f(x, y, s, u^0(x, y, s), v^0(x, y, s)) \right]^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} ds \right]^2.$$

(σ, η, τ) məsələdə iştirak edən bütün funksiyaların Lebeq nöqtəsi olduğundan və $v_\varepsilon(x, y, t)$ (17) şəklində olduğundan alarıq:

$$A^N(t) \leq \alpha(t) \leq C \left[\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} \left(\int_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon} \int_{\eta}^{\eta+\varepsilon} [f(x, y, s, u^0(x, y, s) + \delta u_\varepsilon^N(x, y, s), v) - f(x, y, s, u^0(x, y, s), v^0(x, y, s))]^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} ds \right]^2 \quad (35)$$

$$\leq C\varepsilon^4, \quad t \in [\tau, \tau + \varepsilon]$$

İndi fərz edək ki, $(x, y, t) \in \Omega \times [\tau + \varepsilon, T]$.

$\delta u_\varepsilon^N(x, y, t)$ üçün $t = \tau + \varepsilon$ nöqtəsində başlanğıc şərt olaraq (35)-dən aşağıdakı qiymətləndirməni alarıq:

$$\|\delta u_\varepsilon^N(x, \tau + \varepsilon)\|^2 \leq C\varepsilon^4, \quad \left\| \frac{\partial \delta u_\varepsilon^N(x, \tau + \varepsilon)}{\partial t} \right\|^2 \leq C\varepsilon^4. \quad (36)$$

Əgər $v_\varepsilon(x, y, t)$ funksiyasının (17) şəklini və (36) qiymətləndirməsini nəzərə alsaq, (25) münasibətindən

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \leq$$

$$\leq C\varepsilon^4 + C \int_{\tau+\varepsilon}^t \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy ds +$$

$$+ 2 \int_{\tau+\varepsilon}^t \int_{\Omega} |f(x, y, s, u^0(x, y, s) + \delta u_\varepsilon^N(x, y, s), v^0(x, y, s)) - f(x, y, s, u^0(x, y, s), v^0(x, y, s))| \left| \frac{\partial \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial t} \right| dx dy ds.$$

$$\int_{\Omega} (\delta u_\varepsilon^N(x, y, t))^2 dx dy \leq C\varepsilon^4 + C \int_{\tau+\varepsilon}^t \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial t} \right)^2 dx dy ds$$

oduğunu, $W_2^2(\Omega)$ -da normaların ekvivalentliyini nəzərə alsaq yazı bilərik:

$$\int_{\Omega} \left[(\delta u_\varepsilon^N(x, y, t))^2 + \left(\frac{\partial \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial t} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N(x, y, t)}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \leq$$

$$\leq C\varepsilon^4 + C \int_{\tau+\varepsilon}^t \int_{\Omega} \left[(\delta u_\varepsilon^N(x, y, s))^2 + \left(\frac{\partial \delta u_\varepsilon^N(x, y, s)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta u_\varepsilon^N(x, y, s)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta u_\varepsilon^N(x, y, s)}{\partial t} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N(x, y, s)}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N(x, y, s)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N(x, y, s)}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy ds.$$

Əgər yuxarıda qəbul olunmuş işarələməni nəzərə alsaq sonuncu bərabərsizliyi

$$A^N(t) \leq C\varepsilon^4 + C \int_{\tau+\varepsilon}^t A^N(s) ds \quad (37)$$

şəklində yazarıq.

Buradan Qronuoll lemmasını tətbiq etməklə

$$A^N(t) \leq C\varepsilon^4, \quad t \in [\tau + \varepsilon, T]$$

olduğunu alarıq.

Beləliklə, (22), (35) və (37) münasibətlərindən çıxır ki,

$$\begin{aligned} \|\delta u_\varepsilon^N\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \delta u_\varepsilon^N}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \delta u_\varepsilon^N}{\partial y} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \delta u_\varepsilon^N}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ + \left\| \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N}{\partial x^2} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N}{\partial x \partial y} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon^N}{\partial y^2} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \cdot \varepsilon^4, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (38)$$

Buradan t -yə görə inteqrallamaqla

$$\|\delta u_\varepsilon^N\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \leq C\varepsilon^4 \quad (39)$$

qiymətləndirməsinin doğruluğu alınar.

Onda $N \rightarrow \infty$ olduqda hesab etmək olar ki, $\delta u_\varepsilon(x, y, t)$ funksiyası $\{\delta u_\varepsilon^N(x, y, t)\}$ ardıcılığının $W_2^{2,1}(Q_T)$ fəzasında zəif limitidir və (18)-(20) məsələsinin ümumiləşmiş həllidir.

Banax fəzasında norma aşağıdan zəif yarımkəsilməz olduğundan (39) qiymətləndirməsindən (21) qiymətləndirməsinin doğruluğunu alarıq.

Funksionalın artımını hesablamaq üçün aşağıdakı ayrılışdan istifadə edə bilərik:

$$\begin{aligned} f(x, y, t, u^0(x, y, t) + \delta u_\varepsilon(x, y, t), v^0(x, y, t) + \delta v_\varepsilon(x, y, t)) - f(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t) + \delta v_\varepsilon(x, y, t)) = \\ = \frac{\partial f(x, y, t, u^0(x, y, t), v_\varepsilon(x, y, t))}{\partial u} \delta u_\varepsilon(x, y, t) + \omega(u^0(x, y, t); \delta u_\varepsilon(x, y, t)), \\ f_0(x, y, t, u^0(x, y, t) + \delta u_\varepsilon(x, y, t), v^0(x, y, t) + \delta v_\varepsilon(x, y, t)) - f_0(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t) + \delta v_\varepsilon(x, y, t)) = \\ = \frac{\partial f_0(x, y, t, u^0(x, y, t), v_\varepsilon(x, y, t))}{\partial u} \delta u_\varepsilon(x, y, t) + \omega_0(u^0(x, y, t); \delta u_\varepsilon(x, y, t)). \end{aligned}$$

Aydınır ki, funksionalın artımı

$$\begin{aligned} \delta J(v^0) = J(v_\varepsilon) - J(v^0) = \\ = \int_{Q_T} [f_0(x, y, t, u^0(x, y, t) + \delta u_\varepsilon(x, y, t), v^0(x, y, t) + \delta v_\varepsilon(x, y, t)) - f_0(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t))] dx dy dt. \end{aligned}$$

Fərz edək ki, $\delta u_\varepsilon(x, y, t)$ funksiyası (18)-(20) məsələsinin ümumiləşmiş həllidir, yəni ixtiyari $\Phi(x, y, t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$, $\Phi(x, y, T) = 0$ funksiyası üçün

$$\int_{Q_T} \left[-\rho \frac{\partial \delta u_\varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} + D \nabla^2 \delta u_\varepsilon \nabla^2 \eta + (1-\nu) \left(2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta u_\varepsilon}{\partial x^2} \right) \eta \right] dx dy dt = \quad (40)$$

$$= \int_{Q_T} \left[f(x, y, t, u^0(x, y, t) + \delta u_\varepsilon(x, y, t), v^0(x, y, t) + \delta v_\varepsilon(x, y, t)) - f(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t)) \right] dx dy dt$$

eyniliyi doğrudur.

$\psi(x, y, t)$ funksiyası (14)-(16) qoşma məsələsinin ümumiləşmiş həlli olduğundan ixtiyari $\chi(x, y, t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$, $\chi(x, y, 0) = 0$ funksiyası üçün

$$\int_{Q_T} \left[-\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial t} + (D \nabla^2 \psi) \nabla^2 \chi + (1-\nu) \psi \left(2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right) \right] dx dy dt = \quad (41)$$

$$= \int_{Q_T} \frac{\partial H(x, y, t, u^0, v^0, \psi)}{\partial u} \chi dx dy dt$$

eyniliyi doğrudur.

(40) münasibətində Φ -nin əvəzinə $\Phi = \psi(x, y, t)$, (41) münasibətində χ -nin əvəzinə $\chi = \delta u_\varepsilon(x, y, t)$ götürək və bunları nəzərə almaqla funksionalın artımını aşağıdakı kimi yazaq:

$$\delta J(v^0) = \int_{Q_T} \left[f_0(x, y, t, u^0(x, y, t) + \delta u_\varepsilon(x, y, t), v^0(x, y, t) + \delta v_\varepsilon(x, y, t)) - f_0(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t)) \right] dx dy dt -$$

$$- \int_{Q_T} \left[f(x, y, t, u^0(x, y, t) + \delta u_\varepsilon(x, y, t), v^0(x, y, t) + \delta v_\varepsilon(x, y, t)) - f(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t)) \right] \psi(x, y, t) dx dy dt +$$

$$+ \int_{Q_T} \frac{\partial H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \psi(x, y, t))}{\partial u} \delta u_\varepsilon(x, y, t) dx dy dt$$

və ya

$$\delta J(v^0) = - \int_{Q_T} \left[H(x, y, t, u^0(x, y, t) + \delta u_\varepsilon(x, y, t), v^0(x, y, t) + \delta v_\varepsilon(x, y, t), \psi(x, y, t)) - \right.$$

$$\left. - H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \psi(x, y, t)) \right] dx dy dt +$$

$$+ \int_{Q_T} \frac{\partial H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \psi(x, y, t))}{\partial u} \delta u_\varepsilon(x, y, t) dx dy dt.$$

Axırıncı bərabərliyin sağ tərəfinə

$\int_{Q_T} H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t) + \delta v_\varepsilon(x, y, t), \psi(x, y, t)) dx dy dt$ -ni əlavə edib çıxsaq, yaza

bilərik:

$$\delta J(v^0) = - \int_{Q_T} \left[H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t) + \delta v_\varepsilon(x, y, t), \psi(x, y, t)) - \right.$$

$$\left. - H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \psi(x, y, t)) \right] dx dy dt -$$

$$- \int_{Q_T} \left[H(x, y, t, u^0(x, y, t) + \delta u_\varepsilon(x, y, t), v^0(x, y, t) + \delta v_\varepsilon(x, y, t), \psi(x, y, t)) - \right.$$

$$\left. - H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t) + \delta v_\varepsilon(x, y, t), \psi(x, y, t)) \right] dx dy dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{Q_T} \frac{\partial H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \psi(x, y, t))}{\partial u} \delta u_\varepsilon(x, y, t) dx dy dt. \\
& \text{Əgər Teylor düsturunu tətbiq etsək alarıq:} \\
& \delta J(v^0) = - \int_{Q_T} \left[H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \psi(x, y, t)) + \delta v_\varepsilon(x, y, t), \psi(x, y, t) \right) - \\
& \quad - H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \psi(x, y, t)) \Big] dx dy dt - \\
& - \int_{Q_T} \frac{\partial H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \psi(x, y, t)) + \delta v_\varepsilon(x, y, t), \psi(x, y, t))}{\partial u} \delta u_\varepsilon(x, y, t) dx dy dt - \\
& \quad - \int_{Q_T} \left[\psi(x, y, t) \omega(u^0; \delta u_\varepsilon) - \omega_0(u^0; \delta u_\varepsilon) \right] dx dy dt + \\
& \quad + \int_{Q_T} \frac{\partial H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \psi(x, y, t))}{\partial u} \delta u_\varepsilon(x, y, t) dx dy dt = \\
& = - \int_{Q_T} \left[H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \psi(x, y, t)) + \delta v_\varepsilon(x, y, t), \psi(x, y, t) \right) - H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \psi(x, y, t)) \Big] dx dy dt - \\
& \quad - \int_{Q_T} \left[\frac{\partial H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \psi(x, y, t)) + \delta v_\varepsilon(x, y, t), \psi(x, y, t))}{\partial u} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \psi(x, y, t))}{\partial u} \right] \delta u_\varepsilon(x, y, t) dx dy dt - \\
& \quad - \int_{Q_T} \left[\psi(x, y, t) \omega(u^0; \delta u_\varepsilon) - \omega_0(u^0; \delta u_\varepsilon) \right] dx dy dt.
\end{aligned}$$

Beləliklə, funksionalın artımı üçün aşağıdakı bərabərliyi alarıq:

$$\delta J(v^0) = - \int_{Q_T} \delta_{v_\varepsilon} H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \psi(x, y, t)) dx dy dt + \eta(\varepsilon). \quad (42)$$

Burada

$$\begin{aligned}
& \delta_{v_\varepsilon} H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \psi(x, y, t)) dx dy dt = \\
& = H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t) + \delta v_\varepsilon(x, y, t), \psi(x, y, t)) - H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \psi(x, y, t)), \\
& \eta(\varepsilon) = \int_{Q_T} \left[-\psi(x, y, t) \omega(u^0; \delta u_\varepsilon) + \omega_0(u^0; \delta u_\varepsilon) - \frac{\partial_{v_\varepsilon} H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \psi(x, y, t))}{\partial u} \delta u_\varepsilon \right] dx dy dt.
\end{aligned}$$

Göstərək ki,

$$\int_{Q_T} \left[-\psi(x, y, t) \omega(u^0; \delta u_\varepsilon) + \omega_0(u^0; \delta u_\varepsilon) \right] dx dy dt = o(\varepsilon^3). \quad (43)$$

Doğurdan da $\omega(u^0; \delta u_\varepsilon)$ -un şəklini, $f(x, y, t, u, v)$ funksiyası üzərinə qoyulan şərtləri və orta qiymət teoremini nəzərə alsaq yazı bilərik:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{Q_T} [-\psi(x, y, t) \omega(u^0; \delta u_\varepsilon)] dx dy dt \right| \leq \\
& \leq \int_{Q_T} |\psi(x, y, t)| \times \\
& \times \left| f(x, y, t, u^0(x, y, t) + \delta u_\varepsilon(x, y, t), v^0(x, y, t)) - f(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t)) - \frac{\partial f(x, y, t, u^0, v^0)}{\partial u} \delta u_\varepsilon \right| \times \\
& \times |\delta u_\varepsilon(x, y, t)| dx dy dt \leq C \int_{Q_T} |\psi(x, y, t)| |\delta u_\varepsilon(x, y, t)|^2 dx dy dt.
\end{aligned}$$

$\psi(x, y, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega))$ olduğundan daxilolma teoreminə görə o, Q_T -də məhdud funksiyadır.

Onda (21) qiymətləndirməsinə görə sonuncu bərabərsizliyin sağ tərəfi üçün

$$C \int_{Q_T} |\psi(x, y, t)| |\delta u_\varepsilon(x, y, t)|^2 dx dy dt \leq C \int_{Q_T} |\delta u_\varepsilon(x, y, t)|^2 dx dy dt \leq C \varepsilon^4$$

qiymətləndirməsini alırıq.

Deməli,

$$\int_{Q_T} [-\psi(x, y, t) \omega(u^0; \delta u_\varepsilon)] dx dy dt = o(\varepsilon^3). \quad (44)$$

İndi göstərək ki,

$$\int_{Q_T} [\omega_0(u^0; \delta u_\varepsilon)] dx dy dt = o(\varepsilon^3). \quad (45)$$

$\omega_0(u^0; \delta u_\varepsilon)$ şəklini, $f_0(x, y, t, u, v)$ funksiyası üzərinə qoyulan şərtləri, orta qiymət teoremini və (21) qiymətləndirməsini nəzərə alsaq yazı bilərik:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{Q_T} [\omega_0(u^0; \delta u_\varepsilon)] dx dy dt \right| \leq \\
& \leq \int_{Q_T} \left| f_0(x, y, t, u^0(x, y, t) + \delta u_\varepsilon(x, y, t), v^0(x, y, t)) - f_0(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t)) - \frac{\partial f_0(x, y, t, u^0, v^0)}{\partial u} \delta u_\varepsilon \right| \times \\
& \times |\delta u_\varepsilon(x, y, t)| dx dy dt \leq C \int_{Q_T} |\delta u_\varepsilon|^2 dx dy dt \leq C \varepsilon^4 = o(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Beləliklə, (44) və (45) münasibətlərindən (43) münasibətinin doğruluğu alınır.

(21) qiymətləndirməsindən və $v_\varepsilon(x, y, t)$ -nin təyininə alırıq ki,

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_T} \frac{\partial \delta_{v_\varepsilon} H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \psi(x, y, t))}{\partial u} \delta u_\varepsilon dx dy dt = \\
& = \int_{\Pi_\varepsilon} \frac{\partial \delta_v H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \psi(x, y, t))}{\partial u} \delta u_\varepsilon dx dy dt = 0(\varepsilon^3).
\end{aligned} \quad (46)$$

Onda (43) və (46) münasibətlərindən alırıq ki,

$$\eta(\varepsilon) = o(\varepsilon^3).$$

Ona görə də (42) bərabərliyindən funksionalın artımı üçün aşağıdakı düsturu alırıq:

$$\delta J(v^0) = - \int_{\Pi_\varepsilon} \delta_v H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \psi(x, y, t)) dx dy dt + O(\varepsilon^3).$$

Əgər $(u^0(x, y, t), v^0(x, y, t))$ optimal cütdürsə, onda $\delta J(v^0) \geq 0$. (σ, η, τ) məsələdə iştirak edən bütün funksiyaların Lebeq nöqtəsi olduğundan alırıq:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta J(v^0)}{\varepsilon^3} = - [H(\sigma, \eta, \tau, u^0(\sigma, \eta, \tau), v, \psi(\sigma, \eta, \tau)) - H(\sigma, \eta, \tau, u^0(\sigma, \eta, \tau), v^0(\sigma, \eta, \tau), \psi(\sigma, \eta, \tau))] \geq 0$$

və ya

$$H(\sigma, \eta, \tau, u^0(\sigma, \eta, \tau), v, \psi(\sigma, \eta, \tau)) \leq H(\sigma, \eta, \tau, u^0(\sigma, \eta, \tau), v^0(\sigma, \eta, \tau), \psi(\sigma, \eta, \tau))$$

Beləliklə, aşağıdakı teoremi isbat etmiş olduq:

Teorem. $(u^0(x, y, t), v^0(x, y, t))$ optimal cütdürsə və $\psi(x, y, t)$ (14)-(16) məsələsinin onlara uyğun həlldirsə, onda sanki bütün $(x, y, t) \in Q_T$ və bütün $v \in [v, \mu]$ üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$H(x, y, t, u^0(x, y, t), v, \psi(x, y, t)) \leq H(x, y, t, u^0(x, y, t), v^0(x, y, t), \psi(x, y, t)).$$

Alınan zəruri şərt $(u^0(x, y, t), v^0(x, y, t))$ cütünün optimallığı üçün Pontryaginın maksimum prinsipi tipli zəruri şərtidir.

ƏDƏBİYYAT

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, М.: Наука, 1972, 736 с.
2. Комков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975, 160 с.
3. Арман Ж.-Л.П. Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. М.: Мир, 1977, 144 с.
4. Daqun Tong and Robert L. Williams II, Sunil K. Agrawal. Optimal Shape Control of Composite Thin Plates with Piezoelectric Actuators. Journal of Intelligent Material Systems and Structures. v. 9, pp. 458-467, June, 1998.
5. V.S. Deineka. Optimal Control of the Dynamic State of a Thin Compound Plate. Cybernetics and Systems Analysis. v. 42, pp. 151-175, No 4, 2006.
6. Quliyev H.F., Seyfullayeva X.İ. Nazik lövhənin rəqsləri tənliyi üçün optimal idarəetmə məsələsi. Bakı Universitetinin Xəbərləri, Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası. №3, 2013, s. 64-73.
7. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.
8. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968, 448 с.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СЛАБО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ

Х.И.СЕЙФУЛЛАЕВА

РЕЗЮМЕ

В предлагаемой работе рассмотрена задача оптимального управления для слабо нелинейного уравнения колебаний тонкой пластины. Сначала для каждого фиксированного управления доказано существование и единственность обобщенного решения рассматриваемой краевой задачи, далее доказана теорема существования оптимального управления в задаче оптимального управления, в конце выведено необходимое условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова: тонкая пластина, оптимальное управление, теорема существования, необходимое условие.

OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR THE WEAK NONLINEAR EQUATION OF THE THIN PLATE VIBRATIONS

Kh.I.SEIFULLAYEVA

SUMMARY

In the work the optimal control problem is considered for the weak nonlinear equation of the thin plate vibrations. Existence and uniqueness of the generalized solution of the considered problem are proved for each fixed control. Then a necessary optimality condition of Pontryagin's type maximum principle is derived.

Key word: thin plate, optimal control, existence theorem, necessary conditions.

Redaksiyaya daxil oldu: 11.03.2014-cü il
Çapa imzalandı: 04.04.2014-cü il.